Derivazione delle proprietà della derivata con la notazione di Leibniz

Antonio Bonifati

ABSTRACT

Utilizzando la notazione di Leibniz, molti teoremi applicativi del calcolo differenziale hanno semplice dimostrazione, senza coinvolgere il concetto complicato di limite. Basta applicare un po' di algebra ed alcune approssimazioni per scoprirli. Anche se questo metodo di dimostrazione non è rigoroso, funziona ed è corretto. Vediamo come si fa.

1. Notazione di Leibniz

Secondo la notazione di Leibniz le differenze infinitesime o *differenziali* si indicano con una lettera rappresentativa della grandezza preceduta da una d, ad esempio:

$$df,\ \ dg,\ \ dx,\ \ dt$$

Il differenziale di una funzione va pensato come la differenza tra due valori della funzione distanti di un infinitesimo della variabile dipendente. Ad esempio se f è una funzione di x si ha:

$$df = f(x+dx) - f(x)$$

Qualcuno di voi potrebbe obiettare, a ragione, che la definizione data di differenza infinitesima non è affatto precisa. Si deve accettare il concetto come primitivo dell'analisi infinitesimale, perché non c'è modo di darne una definizione precisa.

2. Derivata

La derivata è il rapporto tra due differenziali: il differenziale della variabile dipendente fratto quello della variabile indipendente, ad esempio:

$$\frac{df}{dx} = \frac{f(x+dx) - f(x)}{dx}$$

Il risultato è una nuova funzione della stessa variabile indipendente. L'operatore derivata risolve parametricamente il problema di trovare la tangente ad una curva, oppure la velocità di un mobile quando sia nota la posizione assunta istante per istante. In quest'ultimo caso la *variabile indipendente* o *parametro* è il tempo, solitamente indicata con la lettera t.

3. Derivata di funzione di funzione

Supponiamo sia data una funzione $f(y)$ e che y sia a sua volta funzione di un'altra variabile x:

$$f = f(y),\ \ y = y(x)$$

Componendo le due funzioni in cascata abbiamo una funzione f' della sola variabile x:

$$f(y) = f(y(x)) = f'(x) \tag{3.1}$$

La domanda è: data la derivata di f rispetto ad y e nota pure la derivata di y rispetto a x, esiste una formula per la derivata della funzione composta $f'(x)$ che coinvolga le derivate note? La risposta è affermativa. Infatti basta considerare la seguente identità ottenuta moltiplicando e dividendo per dy:

$$\frac{d\,f'}{dx} = \frac{d\,f'}{dy}\,\frac{dy}{dx} \tag{3.2}$$

e poi differenziare e dividere la (3.1) per *dy*:

$$\frac{df(y)}{dy} = \frac{d\,f'(x)}{dy}$$

Sostituendo la relazione ottenuta nella (3.2) si ha la proprietà cercata:

$$\frac{d\,f'}{dx} = \frac{df}{dy}\,\frac{dy}{dx} \tag{3.3}$$

che si esprime a parole dicendo che la **derivata della funzione composta è il prodotto delle derivate delle funzioni che la compongono**. Questa proprietà infatti può essere estesa in generale nel caso della composizione di *n* funzioni, con n arbitrario.

L'operatore di derivazione trasforma quindi la composizione di funzioni in un prodotto algebrico!

In effetti esiste una analoga proprietà per i differenziali che si ottiene dalla (3.3) semplificando i *dx* e i *dy* o semplicemente differenziando la (3.1):

$$d\,f' = df$$

In effetti la dimostrazione della (3.3) si sarebbe potuta condurre a partire da questa relazione, dividendo il primo e secondo membro per *dx* e moltiplicando e dividendo il secondo membro per *dy*.

4. Derivata della somma di funzioni

La derivata della somma algebrica di funzioni è la somma algebrica delle derivate. Questa proprietà può essere dimostrata formalmente in base alla analoga proprietà di cui gode il differenziale. Sia:

$$f(x) = g(x) + h(x)$$

differenziando ottengo:

$$df(x) = d(g(x) + h(x)) = dg(x) + dh(x)$$

dividendo per *dx* ho:

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{d(g(x) + h(x))}{dx} = \frac{(dg(x) + dh(x))}{dx} = \frac{dg(x)}{dx} + \frac{dh(x)}{dx}$$

sottintendendo per semplicità la dipendenza dalla x ho la proprietà cercata scritta in forma sintetica:

$$\frac{df}{dx} = \frac{dg}{dx} + \frac{dh}{dx}$$

Per dimostrare che il differenziale passa per le somme procediamo come segue, essendo $f = g + h$ per definizione:

$$df(x) = f(x + dx) - f(x) = (g + h)(x + dx) - (g + h)(x) = g(x + dx) + h(x + dx) - g(x) - h(x) =$$

$$= [g(x + dx) - g(x)] + [h(x + dx) - h(x)] = dg(x) + dh(x)$$

Qui con la notazione $(g + h)$ ho indicato la funzione somma delle due funzioni g e h, che si comporta algebricamente, perché la funzione somma è per definizione la somma delle due funzioni.

Inoltre le costanti possono uscire fuori dal segno di derivata, che si conferma così essere un operatore lineare, così come il differenziale. La dimostrazione è molto semplice e lasciata al lettore.

Man mano che andiamo avanti sarà chiaro sempre di più che le proprietà della derivata si possono far discendere da quelle del differenziale e viceversa, e che per ogni proprietà della derivata ne esiste una analoga per i differenziali. La cosa non stupisce, essendo la derivata nient'altro che un rapporto di differenziali.

5. Derivata del prodotto di funzioni

Consideriamo tre funzioni della stessa variabile x e i lori differenziali:

$$df = f(x+dx) - f(x)$$

$$dg = g(x+dx) - g(x) \tag{5.1}$$

$$dh = h(x+dx) - h(x) \tag{5.2}$$

Sia inoltre per defi nizione:

$$f = gh$$

Calcoliamo:

$$df = d(gh) = (gh)(x+dx) - (gh)(x) = g(x+dx)h(x+dx) - g(x)h(x) \tag{5.3}$$

Per eliminare i dx ricaviamo $g(x+dx)$ dalla (5.1) e sostituiamolo nella (5.3) e analogamente ricaviamo $h(x+dx)$ dalla (5.2) e sostituiamoli nella (5.3):

$$df = [dg + g(x)][dh + h(x)] - g(x)h(x)$$

ora si tratta di moltiplicare due binomi:

$$df = dgdh + dgh(x) + g(x)dh + g(x)h(x) - g(x)h(x)$$

ora bisogna osservare che il prodotto $dgdh$ è trascurabile rispetto a dg o dh od alla loro combinazione lineare e quindi si ha in defi nitiva:

$$df = dgh(x) + g(x)dh$$

dividendo per dx si ha la corrispondente proprietà sulle derivate:

$$\frac{df}{dx} = \frac{dg}{dx}h(x) + g(x)\frac{dh}{dx}$$

Per esercizio provate a estendere questa proprietà nel caso del prodotto di 3 funzioni e poi in generale per un prodotto di un qualsiasi numero n di funzioni arbitrarie.

6. Derivata dell'inversa di una funzione

Sia:

$$f = \frac{1}{g}$$

Mi chiedo: se è nota $\frac{dg}{dx}$, esiste un modo algebrico per scrivere $\frac{df}{dx}$? La risposta è sì e la formula corretta si può trovare considerando ancora una volta la ormai ben nota defi nizione di differenziale:

$$df = f(x+dx) - f(x) = \frac{1}{g(x+dx)} - \frac{1}{g(x)} =$$

facendo il numero misto:

$$= \frac{g(x) - g(x+dx)}{g(x+dx)g(x)}$$

cambiando il segno per ottenere un differenziale al numeratore e trascurando il dx a denominatore si ha la proprietà cercata per i differenziali:

$$df = -\frac{dg}{g^2}$$

al solito dividendo per dx si ottiene la proprietà analoga per le derivate:

$$\frac{df}{dx} = -\frac{\frac{dg}{dx}}{g^2}$$

7. Derivata del rapporto di due funzioni

Sia:

$$f = \frac{g(x)}{h(x)}$$

questa può essere scritta usando l'inverso e il prodotto invece della sola divisione:

$$f = g(x)\,\frac{1}{h(x)}$$

derivando e applicando la proprietà del prodotto e dell'inverso si ottiene:

$$\frac{df}{dx} = \frac{dg}{dx}\,\frac{1}{h(x)} - g(x)\,\frac{\frac{dh}{dx}}{h(x)^2}$$

$$\frac{df}{dx} = \frac{\frac{dg}{dx}\,h(x) - g(x)\,\frac{dh}{dx}}{h(x)^2}$$

questa naturalmente si particolarizza nella formula del paragrafo precedente quando $g(x) = 1$. Moltiplicando per dx si ottiene la proprietà analoga per le differenze infinitesime (differenziali):

$$df = \frac{dgh(x) - g(x)dh}{h(x)^2}$$